v-KRÆFTER OG w-MOMENTER

AF *I. G. HANNEMANN*

v-Kræfter og w-Momenter er et simpelt, regningsmæssigt Hjælpemiddel til Bestemmelse af en Bjælkes Nedbøjninger, naar Bjælken paavirkes af en given Belastning.

I det følgende foretages først (Side 107 ff.) en anskuelig, geometrisk Udledning af v-Kræfter og w-Momenter, gældende saavel for massive som for Gitterbjælker[1]) Derpaa (Side 110 ff.) gennemgaas de forskellige Understøtninger og Led, der kan forekomme i en Bjælke, og det bevises, at det altid er muligt at opfatte Nedbøjningslinien som en Momentkurve. Endelig (Side 112 ff.) udledes praktiske Udtryk for v-Kræfter og w-Momenter for massive Bjælker og Gitterbjælker, og Brugen heraf vises ved et Eksempel (Side 118).

Almengyldige Udtryk for v-Kræfter og w-Momenter.

Man kan definere v-Kræfter og w-Momenter som (fiktive) Kræfter og Momenter, der — anbragt paa en af den givne Bjælke afhængig (tænkt) Bjælke — giver en Momentkurve identisk med Nedbøjningslinien for den givne Bjælke paavirket af den Belastning, for hvilken Nedbøjningslinien søges.

Den tænkte Bjælke er Punkt for Punkt konjugeret med den givne, idet den fremkommer af den givne Bjælke som den Linie (Kurve), hvis Nedbøjningsordinater ønskes bestemt, eller som Projektionen heraf paa en vandret Linie. Den konjugerede Bjælke forsynes med specielle Punkter svarende til de specielle Punkter i den givne Bjælke paa bestemt Maade, saaledes som det fremgaar af Fig. 2 med Forklaring (Side 111 ff.). Der benyttes samme Udgangslinie for Nedbøjningslinie og Momentkurve.

I det følgende antages de søgte Nedbøjningsordinater lodrette (Bjæl-

[1]) Udtryk for v-Kræfter er i *A. Ostenfeld*: Teknisk Statik I, 1920, §§ 57—60 bestemt ved Hjælp af Tovpolygon og i *Chr. Nøkkentved*: Teknisk Statik I, 1942, §§ 23—26 udledt ved Hjælp af Differensligning. Begge Steder er den geometriske Fortolkning af v-Kræfter ogsaa nævnt.

ken vil altid kunne drejes saaledes, at dette er Tilfældet), og de bevægelige Understøtninger og Forskydningsled (se Fig. 2) tænkes forsynet med vandret (lodret) Rullebane. Ved skraa Rullebane bestemmes først Nedbøjningslinien ud fra de rigtige Snitkræfter, men under Forudsætning af vandret (lodret) Rullebane, hvorefter Lejepunkternes vandrette (lodrette) Bevægelse findes, saaledes at man til Slut kan dreje den givne Bjælke, indtil Lejepunkterne faar rigtig Beliggenhed[1]).

Endvidere forudsættes den givne Bjælke i Princippet at virke som en Bjælke (statisk bestemt, se Side 112) og ikke som en Bue. — Ved en 3 Charniers-Bue findes først Nedbøjningslinien ud fra de rig-

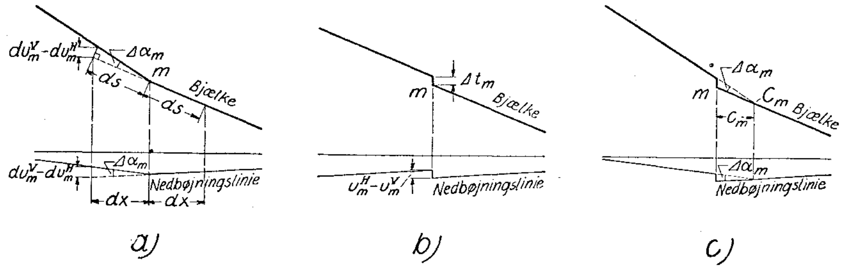

Fig. 1.

tige Snitkræfter, men under Forudsætning af, at Topcharnieret er fjernet, og det ene Vederlagscharnier til Gengæld er bevægeligt med vandret Bane; herefter bestemmes Lejets vandrette Bevægelse, saaledes at man til sidst, idet Topcharnieret nu atter anbringes, kan dreje de to Buedele saadan, at Vederlagslejet netop faar sin oprindelige Beliggenhed. —

Nedbøjningsliniens Ordinater og Tangentvinkler er u henholdsvis α, hvor $\alpha \backsim \operatorname{tg} \alpha$, idet u og α kan regnes uendelig smaa. Momenterne og Forskydningskræfterne i den konjugerede Bjælke er M og T. Endvidere indføres her Indexbetegnelsen: $V(H)$ for Begrebet: umiddelbart til venstre (højre) for.

Til en Begyndelse betragtes et almindeligt Punkt m i en Bjælke.

Hvis Bjælkedelen til venstre for Punktet drejer sig Vinklen $\Delta\alpha_m$ (positiv med Uret) om dette Punkt i Forhold til den øvrige Bjælke (Fig. 1a), faar Nedbøjningslinien et Knæk i dette Punkt bestemt ved:

$$\frac{du_m^V}{dx} - \frac{du_m^H}{dx} = \alpha_m^V - \alpha_m^H = \Delta\alpha_m.$$

Da Momentkurven skal have et tilsvarende Knæk, maa der i Pkt. m af den konjugerede Bjælke anbringes en lodret Enkeltkraft (v-Kraft) v_m (positiv nedad) givet ved Udtrykket:

[1]) Se nærmere herom i *Chr. Nøkkentved*: Teknisk Statik I, 1942, § 26.

$$v_m = \Delta\alpha_m, \tag{1}$$

idet Knækket i Momentkurven er bestemt ved:

$$\frac{dM_m^V}{dx} - \frac{dM_m^H}{dx} = T_m^V - T_m^H = v_m.$$

Hvis Bjælkedelen til venstre for Pkt. m parallelforskyder sig et lodret Stykke Δt_m (positiv opad) i Forhold til den øvrige Bjælke (Fig. 1 b), faar Nedbøjningslinien et lodret Spring i dette Punkt bestemt ved:

$$u_m^H - u_m^V = \Delta t_m.$$

Da Momentkurven skal have et tilsvarende Spring, maa der i Pkt. m af den konjugerede Bjælke anbringes et Moment (w-Moment) w (positiv med Uret) givet ved Udtrykket:

$$w_m = \Delta t_m, \tag{2}$$

idet Springet i Momentkurven er bestemt ved:

$$M_m^H - M_m^V = w_m.$$

Det bemærkes, at en indbyrdes vandret Forskydning af de to Bjælkedele ikke giver noget Bidrag til Nedbøjning af Bjælken, naar Bevægelsesretningen for bevægelige Lejer er vandret.

Hvis Bjælkedelen til venstre for Pkt. m i Forhold til den øvrige Bjælke drejer sig en Vinkel $\Delta\alpha_m$ (positiv med Uret) om et Punkt C_m, hvis Afstand fra Pkt. m i vandret Projektion er c_m (positiv, naar Pkt. C_m ligger til højre for Pkt. m) (Fig. 1 c), svarer dette til, at den venstre Bjælkedel baade drejer sig Vinklen $\Delta\alpha_m$ om Pkt. m og forskyder sig Stykket $\Delta t_m = c_m \Delta\alpha_m$ i lodret Retning. I Henhold til Ligning (1) og (2) svarer Nedbøjningslinien herfor imidlertid til Momentkurven fra v-Kraften: $v_m = \Delta\alpha_m$ og w-Momentet $w_m = c_m \Delta\alpha_m$, begge virkende i Pkt. m af den konjugerede Bjælke. Resultanten af disse Kræfter er en lodret Enkeltkraft (v-Kraft):

$$v_{c_m} = \Delta\alpha_m \tag{3}$$

(positiv nedad) virkende i den vandrette Afstand c_m (positiv, naar Kraften virker til højre for Pkt. m) fra Pkt. m af den konjugerede Bjælke paa en Arm, der i Pkt. m er fast forbundet til Bjælken.

Forekommer der ikke noget Knæk eller Spring i Nedbøjningslinien i et Punkt m, d. v. s. $\Delta\alpha_m = 0$ og $\Delta t_m = 0$, faas af (1) og (2) $v_m = 0$ og $w_m = 0$, hvoraf følger, at der heller ikke kommer noget Knæk eller Spring i Momentkurven i dette Punkt.

Betingelser for Dualitet mellem Nedbøjningslinie og Momentkurve.

Det skal nu vises, at man ved Anvendelse af Udtrykkene (1)—(3) og ved paa passende Maade at anbringe specielle Punkter i den konjugerede Bjælke svarende til den givne Bjælkes specielle Punkter altid kan opnaa, at Momentkurven overalt kommer til at svare til Nedbøjningslinien.[1])

I Fig. 2 *a—g* er vist alle de forskellige Grundformer, som en Understøtning af eller et Led i Bjælken kan antage. I vandret Retning kan Understøtningerne enten være faste (som vist paa Figuren) eller bevægelige; i sidstnævnte Tilfælde forudsættes som ovenfor anført Rullebanen vandret (lodret).

I Fig. 2 er kun vist Mellemunderstøtninger; en Endeunderstøtning kan imidlertid altid opfattes som en Mellemunderstøtning med en uendelig kort fri Udkragning. Elastiske Understøtninger faas som en Kombination af almindelige Understøtninger (Fig 2 *a—c*) og elastiske Led (Fig. 2 *d*). Det normale Bjælkeelement fremkommer i Fig. 2 *d*, naar det elastiske Led her har samme Elasticitet som et tilsvarende (uendeligt lille) Stykke af selve Bjælken.

I Tilknytning til Fig. 2 er nedenfor opstillet en Oversigt over de til de forskellige Understøtninger og Led hørende Betingelser for Nedbøjningslinien til den givne Bjælke henholdsvis Momentkurven til den konjugerede Bjælke (Bogstaverne *a—g* svarer til Figurene *a—g* i Fig. 2, selve Punktbetegnelsen er overalt udeladt). En Gennemgang af disse Betingelser viser, at de tilsammen indeholder alle Variationsmulighederne for Nedbøjningsliniens Forløb i det vilkaarlige Punkt, saaledes at Fig. 2 *a—e* virkelig repræsenterer alle de Grundformer, som en Understøtning samt et Led i Bjælken kan have. Endvidere ses det, at der mellem de forskellige Arter af Understøtninger og Led parvis optræder en Dualitet saaledes, at den ene Punkttype i den givne Bjælke svarer til den anden i den konjugerede Bjælke og omvendt, idet Betingelserne for Nedbøjningslinien og for Momentkurven herved kommer til at svare til hinanden.

Da en Endeunderstøtning er identisk med en Mellemunderstøtning med en uendelig kort fri Udkragning, hvilket for den konjugerede Bjælke svarer til en fast Endeindspænding med et til ovennævnte Understøtning svarende Led (se nedenstaaende Oversigt) uendelig tæt ved,

[1]) Den Samhørighed, der saaledes forefindes mellem Nedbøjningslinien til den givne Bjælke og Momentkurven for den konjugerede Bjælke, kommer ogsaa til Udtryk gennem Green's Ligning som angivet i *P. M. Frandsen*: Bygningsstatik I. 2. Udg. 1942, Art. 55.

faas specielt, at Understøtningsformen: simpel Endeunderstøtning eller bevægelig Endeindspænding bliver ens for den givne og den konjugerede Bjælke.

For ogsaa i Tilfældet Fig. 2 *d* at faa Overensstemmelse mellem Betingelserne for Nedbøjningslinie og Momentkurve maa den konjugerede Bjælke her ligesom den givne kunne overføre Forskydningskræfter og Momenter gennem Punktet, men man maa desuden som vist i Fig. 2 *d* lade et Moment og en Enkeltkraft angribe i Punktet. For det normale Bjælkeelement gælder det samme, idet dette Tilfælde falder ind under Ledtypen Fig. 2 *d* (se ovenfor), blot bliver de forskellige Størrelser her uendelig smaa.

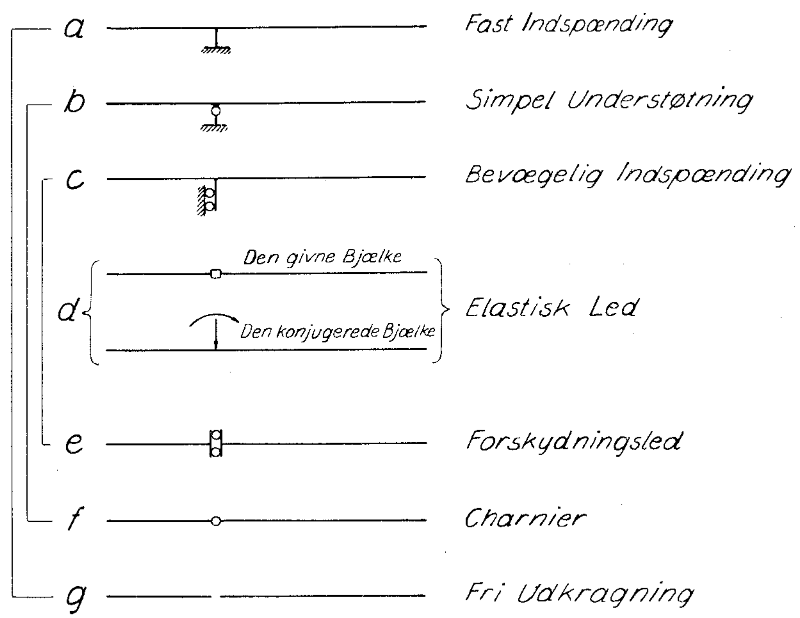

Fig. 2.

Oversigt over de til forskellige Punktformer hørende Betingelser.

	Den givne Bjælke.			*Den konjugerede Bjælke.*	
a)	$u_V = u_H = 0;$	$\alpha_V = \alpha_H = 0.$	*g*)	$M_V = M_H = 0;$	$T_V = T_H = 0.$
b)	$u_V = u_H = 0;$	$\alpha_V - \alpha_H = 0.$	*f*)	$M_V = M_H = 0;$	$T_V - T_H = 0.$
c)	$u_V - u_H = 0;$	$\alpha_V = \alpha_H = 0.$	*e*)	$M_V - M_H = 0;$	$T_V = T_H = 0.$
d)	$u_V - u_H = -t_k;$	$\alpha_V - \alpha_H = \alpha_k.$	*d*)	$M_V - M_H = -M_k;$	$T_V - T_H = P_k.$
e)	$u_V - u_H = -t_x;$	$\alpha_V - \alpha_H = 0.$	*c*)	$M_V - M_H = -M_x;$	$T_V - T_H = 0.$
f)	$u_V - u_H = 0;$	$\alpha_V - \alpha_H = \alpha_x.$	*b*)	$M_V - M_H = 0;$	$T_V - T_H = P_x.$
g)	$u_V - u_H = -t_x;$	$\alpha_V - \alpha_H = \alpha_x.$	*a*)	$M_V - M_H = -M_x;$	$T_V - T_H = P_x.$

Af den fuldstændige Dualitet mellem Nedbøjningslinie og Momentkurve, som denne Oversigt fremviser, ses det, at en hvilken som helst Nedbøjningslinie baade med Hensyn til Form (de fire sidste Ligninger) og Beliggenhed (de tre første Ligninger) altid kan opfattes som en Momentkurve til en med den givne Bjælke konjugeret Bjælke, naar man i sidstnævnte anbringer specielle Punkter svarende til den givne Bjælkes i Overensstemmelse med Fig. 2, og naar man i det specielle Punkt: elastisk Led (Fig. 2 *d*) sætter Momentet $M_k = t_k$ og Enkeltkraften $P_k = \alpha_k$ og i Bjælkens normale Punkter (Fig. 2 *d* med det elastiske Led erstattet af et normalt Bjælkeelement) tilsvarende anbringer *w*-Momenterne: $w = \Delta t_k$ og *v*-Kræfterne: $v = \Delta\alpha_k$ som angivet i Udtrykkene (1)—(3).

Er den givne Bjælke geometrisk bestemt, d. v. s. de geometriske Betingelser (Lign. *a*—*c*) netop tilstrækkelige til at bestemme de variable Størrelser t_x og α_x (Lign. *e*—*g*) af de givne Størrelser t_k (Δt_k) og α_k ($\Delta\alpha_k$) (Lign. *d*), maa den konjugerede Bjælke altsaa tilsvarende være statisk bestemt, d. v. s. de statiske Ligevægtsbetingelser (Lign. *e*—*g*) netop tilstrækkelige til at bestemme de variable Størrelser M_x og P_x (Lign. *a*—*c*) af de givne Størrelser M_k (*w*) og P_k (*v*) (Lign. *d*).

Ved statisk ubestemte Konstruktioner betragtes det statisk bestemte Hovedsystem med den givne Belastning og de dertil svarende Værdier af de Overtallige.

Ved Hjælp af Ligningerne (1)—(3) er man umiddelbart i Stand til at bestemme Udtryk for *v*-Kræfter og *w*-Momenter for saavel massive som Gitterbjælker, idet man blot skal finde Størrelserne $\Delta\alpha_m$ og Δt_m for disse. I Henhold til Superpositionsloven kan man paa denne Maade bestemme *v*-Kræfter og *w*-Momenter for hvert enkelt Elements Deformation for sig og til Slut belaste den konjugerede Bjælke med alle de saaledes fundne Kræfter.

Udtryk for v-Kræfter og w-Momenter for massive Bjælker.

For massive Bjælker gælder som bekendt følgende Ligninger for Formforandringen $\Delta d\alpha$, Δds og Δdf af Bjælkestykket *ds* (Fig. 3) paavirket af henholdsvis Momentet *M*, Normalkraften *N* og Forskydningskraften *T*:[1])

$$\Delta d\alpha = \frac{M}{EI} ds, \quad \Delta ds = \frac{N}{EF} ds \quad \text{og} \quad \Delta df = \frac{T}{GF_k} ds,$$

[1]) Se *P. M. Frandsen*: Bygningsstatik II, 1944, Art. 29.

hvor *I*, *F* og F_k er Tværsnittets Inertimoment, Areal og »Kropareal«, og *E* og *G* er Elasticitetskoefficienten for Træk (Tryk) henholdsvis Forskydning. Idet Tangentvinklen til Bjælkeaksen kaldes φ, og den positive Retning for denne og Snitkræfterne er som angivet paa Fig. 3, faas af Ligning (1) og (2) *v*-Kræfterne og *w*-Momenterne som en Kraftbelastning:

$$z^v = \frac{\Delta d\alpha}{dx} = \frac{M}{EI} \sec\varphi \qquad (4)$$

samt som en Momentbelastning (se Fig. 3):

$$z^w = \frac{\Delta dt}{dx} = \frac{N}{EF} \operatorname{tg}\varphi + \frac{T}{GF_k}. \qquad (5)$$

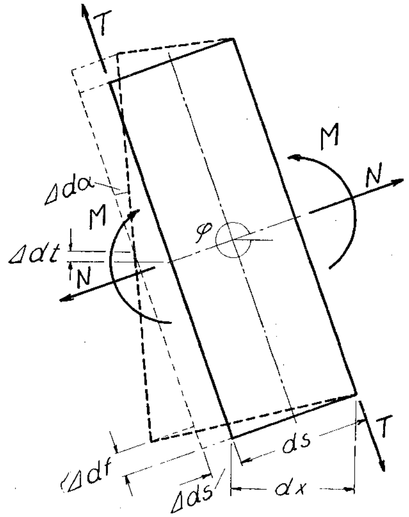

Fig. 3.

Erstattes z^v- og z^w-Belastningen med *v*-Kræfter i Knudepunkterne (v_m i Pkt. *m*), faas, idet z^v- og z^w-Belastningen regnes indirekte virkende imellem Knudepunkterne, med de paa Fig. 4 angivne Betegnelser:

fra z^v-Belastningen:

$$v_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_0^{\lambda_m} z^v x dx + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\int_0^{\lambda_{m+1}} z^v x' dx', \qquad (6)$$

der, saafremt Belastningsfladen fra z^v er eller med Tilnærmelse kan regnes trapezformig mellem Knudepunkterne, bliver til:

$$v_m = \frac{\lambda_m}{6}(z^v_{H\,m-1} + 2\,z^v_{V\,m}) + \frac{\lambda_{m+1}}{6}(2\,z^v_{H\,m} + z^v_{V\,m+1}), \qquad (6\,a)$$

hvor Index *V*(*H*) ligesom tidligere betyder umiddelbart til venstre (højre) for det paagældende Punkt;

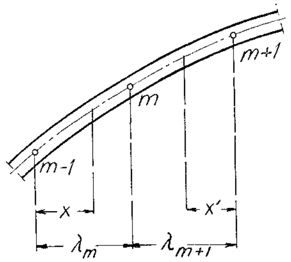

Fig. 4.

fra z^w-Belastningen:

$$v_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_0^{\lambda_m} z^w dx - \frac{1}{\lambda_{m+1}}\int_0^{\lambda_{m+1}} z^w dx', \qquad (7)$$

der med tilsvarende Forudsætning som ovenfor bliver til:

$$v_m = \frac{1}{2}(z^w_{H\,m-1} + z^w_{V\,m} - z^w_{H\,m} - z^w_{V\,m+1}). \tag{7 a}$$

For en vandret Bjælke A—B med konstant Tværsnit faas Nedbøjningerne u^t fra Forskydningskræfterne T af Udtrykket (5), der giver:

$$z^w dx = \frac{T}{GF_k}dx = \frac{dM}{GF_k}.$$

Heraf faas:

for Bjælken simpelt understøttet i Pkt. A og B:

$$u^t_m = \int_B^m z^w dx = \frac{M_m}{GF_k},$$

idet:

$$\int_B^A z^w dx = \frac{1}{GF_k}\int_B^A dM = \frac{M_A - M_B}{GF_k} = 0;$$

for Bjælken indspændt i Pkt. B og fri i Pkt. A:

$$u^t_m = \int_B^m z^w dx = \frac{M_m - M_B}{GF_k}.$$

Disse Formler kan naturligvis ogsaa direkte faas af Differentialligningen for u^t.[1])

De Bidrag til Nedbøjningerne, der stammer fra Normal- og Forskydningskræfterne (Ligning (5) og (7)), er i Almindelighed saa smaa i Forhold til Nedbøjningerne fra Momenterne, at man med god Tilnærmelse kan se bort fra dem.[2])

Udtryk for v-Kræfter og w-Momenter for Gitterbjælker.

Faar en Flange- eller Gitterstang (s_1) i en Gitterbjælke (Fig. 5 og 6) Længdeændringen Δs_1 (positiv som en Forlængelse), og kan der lægges et Snit, der foruden (s_1) kun overskærer to andre Stænger (s_2) og (s_3), vil de to Dele, som et saadant Snit deler Bjælken i, indbyrdes dreje sig Vinklen $\pm \frac{\Delta s_1}{r_1}$ om Skæringspunktet for (s_2) og (s_3), hvor r_1 (der her altid regnes positiv) er Afstanden fra Drejningspunktet til Stangen (s_1). Δs_1 bestemmes af Ligningen:

$$\Delta s_1 = \frac{S_1 s_1}{EF_1},$$

[1]) Se Fodnote Side 112.
[2]) Se herom *A. Ostenfeld*: Teknisk Elasticitetslære, 1924, § 41.

hvor s_1 er Længden, S_1 er Stangkraften (positiv som Træk) og F_1 er Arealet af Stangen (s_1).

Med de paa Fig. 5 og 6 angivne Afstande faas herefter fra Længdeændringerne Δo, Δu, Δd og Δh af Hovedet (o), Foden (u), Diagonalen (d) og Vertikalen (h) ved Anvendelse af Ligning (1) og (3) følgende v-Kræfter:

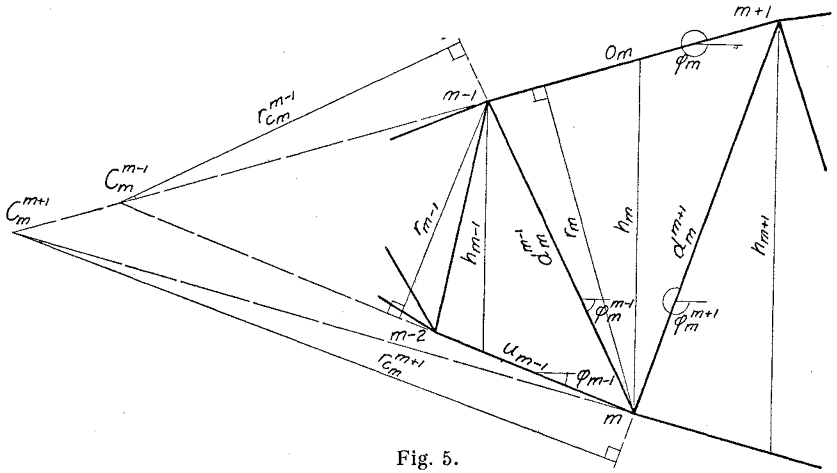

Fig. 5.

Fra Δo_m og Δu_{m-1} af Flangerne o_m og u_{m-1} (Fig. 5) kommer i Pkt. m henholdsvis $m-1$ (jfr. Fig. 1 a):

$$v^o_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = -\frac{\Delta o_m}{h_m}\sec\varphi_m, \tag{8 a}$$

$$v^u_{m-1} = \frac{\Delta u_{m-1}}{r_{m-1}} = \frac{\Delta u_{m-1}}{h_{m-1}}\sec\varphi_{m-1}. \tag{8 b}$$

Fra Δd^{m-1}_m og Δd^{m+1}_m af Diagonalerne d^{m-1}_m og d^{m+1}_m (Fig. 5) kommer i Pkt. C^{m-1}_m henholdsvis C^{m+1}_m (jfr. Fig. 1 c):

$$v^{m-1}_{c_m} = -\frac{\Delta d^{m-1}_m}{r^{m-1}_{c_m}}, \tag{9 a}$$

$$v^{m+1}_{c_m} = \frac{\Delta d^{m+1}_m}{r^{m+1}_{c_m}}. \tag{9 b}$$

Fra Δh^m_{m-1} og Δh^{m-1}_m af Vertikalerne h^m_{m-1} (Fig. 6 a) og h^{m-1}_m (Fig. 6 b) kommer i Pkt. C^m_{m-1} henholdsvis C^{m-1}_m (jfr. Fig. 1 c):

$$v^m_{c_{m-1}} = \frac{\Delta h^m_{m-1}}{r^m_{c_{m-1}}}, \tag{10a}$$

$$v^{m-1}_{c_m} = -\frac{\Delta h^{m-1}_m}{r^{m-1}_{c_m}}. \tag{10b}$$

Til praktisk Brug faas med de paa Fig. 5 og 6 angivne Vinkler φ af Udtrykkene (9a og b) og (10a og b) ved simpel Udregning følgende:

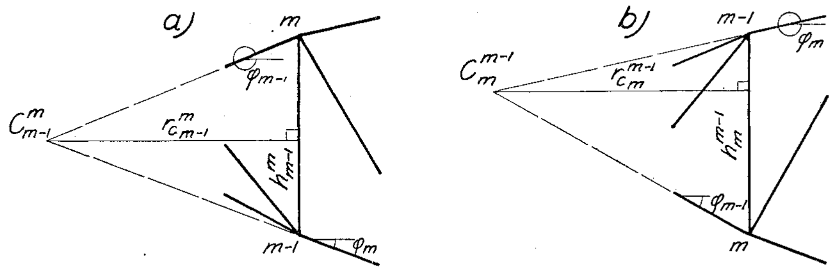

Fig. 6.

v-Kraften $v^{m-1}_{c_m}$ (9a) fra Δd^{m-1}_m af Diagonalen d^{m-1}_m (Fig. 5) kan erstattes af to v-Kræfter:

$$v^d_{m-1} = -\frac{\Delta d^{m-1}_m}{h_{m-1}} \sec \varphi^{m-1}_m \quad \text{og} \quad v^d_m = \frac{\Delta d^{m-1}_m}{h_m} \sec \varphi^{m-1}_m, \tag{9c}$$

virkende i Pkt. $m-1$ henholdsvis m.

v-Kraften $v^{m+1}_{c_m}$ (9b) fra Δd^{m+1}_m af Diagonalen d^{m+1}_m (Fig. 5) kan erstattes af to v-Kræfter:

$$v^d_m = \frac{\Delta d^{m+1}_m}{h_m} \sec \varphi^{m+1}_m \quad \text{og} \quad v^d_{m+1} = -\frac{\Delta d^{m+1}_m}{h_{m+1}} \sec \varphi^{m+1}_m, \tag{9d}$$

virkende i Pkt. m henholdsvis $m+1$.

v-Kraften $v^m_{c_{m-1}}$ (10a) fra Δh^m_{m-1} af Vertikalen h^m_{m-1} (Fig. 6*a*) kan erstattes af en v-Kraft og et w-Moment:

$$v^h_{m-1} = \frac{\Delta h^m_{m-1}}{h^m_{m-1}} (\mathrm{tg}\, \varphi_m - \mathrm{tg}\, \varphi_{m-1}) \quad \text{og} \quad w^h_{m-1} = -\Delta h^m_{m-1}, \tag{10c}$$

virkende i Pkt. $m-1$ (m).

v-Kraften $v^{m-1}_{c_m}$ (10b) fra Δh^{m-1}_m af Vertikalen h^{m-1}_m (Fig. 6*b*) kan erstattes af en v-Kraft og et w-Moment:

$$v^h_m = \frac{\Delta h^{m-1}_m}{h^{m-1}_m} (\mathrm{tg}\, \varphi_m - \mathrm{tg}\, \varphi_{m-1}) \quad \text{og} \quad w^h_m = \Delta h^{m-1}_m, \tag{10d}$$

virkende i Pkt. m ($m-1$).

For en Parallelgitterdrager bliver v-Kraften i (10c og d) Nul, saa Δh her kun giver w-Moment.

Hvis Flangerne hælder saaledes, at Pkt. C falder til højre for i Stedet for som paa Fig. 5 og 6 til venstre for de der angivne Gitterstænger, faas, at Udtrykkene (9a og b) og (10a og b) gælder med modsat Fortegn, medens Udtrykkene (9c og d) og (10c og d) gælder uforandret.

Det bemærkes, at man ved Anvendelse af ovenstaaende Udtryk finder Nedbøjningen baade for Hovedets og for Fodens Knudepunkter — selv i de Tilfælde, hvor der er Vertikaler.

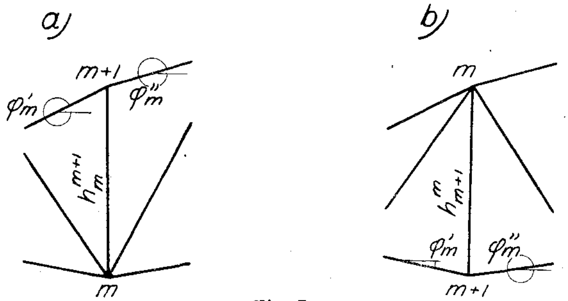

Fig. 7.

Fra Δh^{m+1}_m og Δh^m_{m+1} af Vertikalerne h^{m+1}_m (Fig. 7*a*) og h^m_{m+1} (Fig. 7*b*) og den heraf følgende indbyrdes Vinkeldrejning af de to Bjælkedele om Pkt. m (bestemmes let ad geometrisk Vej) kommer i Pkt. m ($m+1$) en v-Kraft:

$$v^h_m = \frac{\Delta h^{m+1}_m}{h^{m+1}_m} (\mathrm{tg}\, \varphi''_m - \mathrm{tg}\, \varphi'_m), \tag{11a}$$

$$v^h_m = \frac{\Delta h^m_{m+1}}{h^m_{m+1}} (\mathrm{tg}\, \varphi''_m - \mathrm{tg}\, \varphi'_m). \tag{11b}$$

Ofte kan man med brugelig Tilnærmelse se bort fra w-Momenterne samt fra v-Kræfterne fra Gitterstængerne, undtagen paa de Steder, hvor der forekommer større Spring i Forskydningskraftkurven (jfr. efterfølgende Taleksempel), eller for de Gitterbjælker, hvor Gitterudfyldningen er meget spinkel i Forhold til Flangerne.

Ønskes Nedbøjningen kun bestemt i enkelte Punkter, kan disse alene betragtes som Knudepunkter belastet med v-Kræfter svarende til de gensidige Vinkeldrejninger af Liniestykkerne mellem Punkterne. Gensidige Vinkeldrejninger kan som bekendt bestemmes ved Anvendelse af Arbejdsligningen[1]), hvorved man for massive Systemer netop kommer til Ligning (6), medens man for Gittersystemer kommer til følgende almindelige Udtryk:

$$v_m = \Sigma S' \varDelta s, \tag{12}$$

hvor $\varDelta s$ er Stængernes virkelige Længdeændringer (positive som Forlængelser), og S' er de Stangkræfter (positive som Træk), som hidrører fra den specielle Belastning, der paasættes Systemet for at kunne benytte Arbejdsligningen. Af Ligning (12) kan Ligningerne (8)—(11) udledes, idet tre paa hinanden følgende Knudepunkter i Gittersystemet betragtes.

Nedbøjningen af enkelte Punkter kan naturligvis ogsaa findes ved at benytte de normale v-Kræfter og w-Momenter.

Taleksempel.

Den i Fig. 8*a* viste Parallelgitterdrager er simpelt understøttet i A og B og udkraget over B til G, hvor den som vist paavirkes af Kraften P. Faginddeling

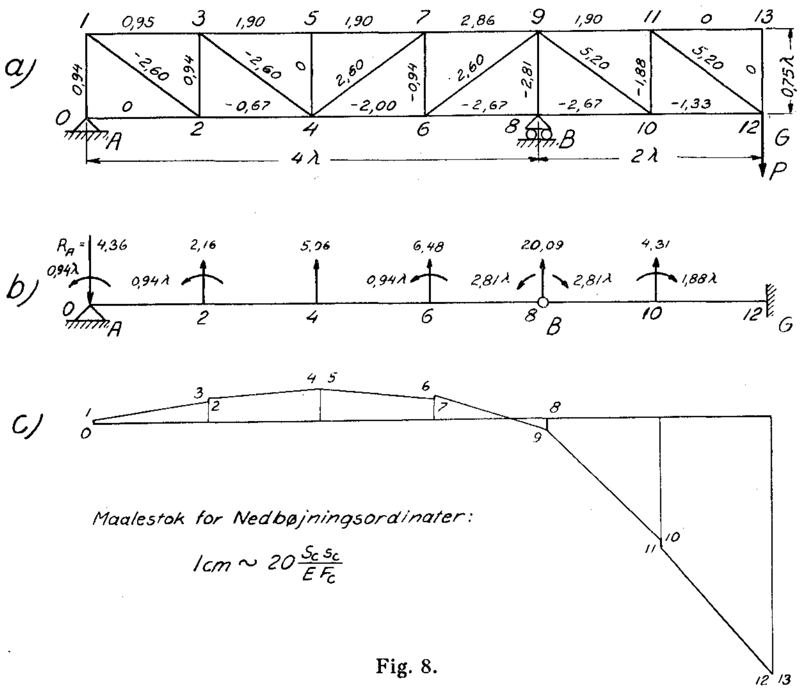

Fig. 8.

[1]) Se saaledes *Chr. Nøkkentved*: Teknisk Statik I, 1942, § 21 (Fig. 53).

og Gitterudfyldning er som vist paa Figuren. Dragerens Højde er $0{,}75\,\lambda$, hvor λ er Faglængden. Tværsnitsarealet af Stængerne i Fod, Hoved og Gitter er henholdsvis F, $0{,}7F$ og $0{,}4F$. Nedbøjningen af Dragerens Knudepunkter ønskes bestemt.

Stangkræfterne S bestemmes, hvorefter Stængernes Forlængelser $\varDelta s$ findes af Udtrykket:

$$\varDelta s = \frac{Ss}{EF} \quad \text{eller} \quad \frac{EF_c}{S_c s_c} \varDelta s = \frac{S}{S_c} \frac{s}{s_c} \frac{F_c}{F}.$$

For $S_c = P$, $s_c = \lambda$ og $F_c = F$ er Størrelsen $\frac{EF_c}{S_c s_c} \varDelta s$ for de forskellige Stænger paaskrevet i Fig. 8*a*.

Af Udtrykkene (8a og b), (9c og d) og (10c og d) bestemmes v-Kræfter og w-Momenter for Længdeforandringerne af Stængerne i Hoved og Fod, Diagonaler samt Vertikaler. De herved fundne Størrelser $\left(\text{Faktoren } \frac{EF_c}{S_c}\right)$ er opstillet i nedenstaaende Skema, og de resulterende Størrelser bestemmes og anbringes paa den til den givne Bjælke svarende konjugerede Bjælke (jfr. Fig. 2) som vist i Fig. 8*b*. For denne Bjælke bestemmer man nu Reaktionen R_A i Pkt. A og Forskydningskræfterne T $\left(\text{Faktoren } \frac{EF_c}{S_c}\right)$, hvorefter Momenterne M $\left(\text{Faktoren } \frac{EF_c}{S_c s_c}\right) \sim$ Nedbøjningerne u $\left(\text{Faktoren } \frac{EF_c}{S_c s_c}\right)$ af den givne Bjælke findes. Udregningerne er opstillet nedenfor og Nedbøjningslinien for Stangpolygonen 0—1—2—3—4—5—4—7—6—9—8—9—10—11—12—13 af Bjælken Fig. 8*a* er med vandret Udgangslinie indtegnet i Fig. 8*c*.

Bestemmelse af v-Kræfter og w-Momenter.

Faktor	Pkt. / v-Kraft	0	2	4	6	8	10	12
$\frac{EF_c}{S_c}$	v_m^0	0	— 1,27	— 5,06	— 3,81	0	— 2,53	0
	v_m^u	0	— 0,89	0	— 2,67	— 7,10	— 1,78	0
	v_m^d	. .	— 4,33	— 4,33	— 4,33	— 4,33	8,66	8,66
		4,33	4,33	4,33	4,33	— 8,66	— 8,66	. .
	v_m	(4,33)	— 2,16	— 5,06	— 6,48	— 20,09	— 4,31	(8,66)
$\frac{EF_c}{S_c s_c}$	$w_m = w_m^h$	— 0,94	— 0,94	0	— 0,94	— 2,81 2,81	1,88	0

Bestemmelse af Nedbøjningsordinater.

$$\frac{EF_c}{S_c} R_A = \frac{3}{4} 2{,}16 + \frac{1}{2} 5{,}06 + \frac{1}{4} 6{,}48 - \frac{1}{4}(3 \cdot 0{,}94 + 2{,}81) = 5{,}77 - 1{,}41 = 4{,}36.$$

Faktor $\frac{EF_c}{S_c}$				Faktor $\frac{EF_c}{S_c s_c}$	
T_{0-2} =	$-4{,}36$	$u_0 = M_1^v =$	0	$u_6 = M_6^h =$	$-6{,}52$
	$2{,}16$		$-0{,}94$		$9{,}34$
T_{2-4} =	$-2{,}20$	$u_1 = M_1^h =$	$-0{,}94$	$u_9 = M_8^v =$	$2{,}82$
	$5{,}06$		$-4{,}36$		$-2{,}81$
T_{4-6} =	$2{,}86$	$u_2 = M_2^v =$	$-5{,}30$	$u_8 = M_8 =$	0
	$6{,}48$		$-0{,}94$		$2{,}81$
T_{6-8} =	$9{,}34$	$u_3 = M_2^h =$	$-6{,}24$	$u_9 = M_8^h =$	$2{,}81$
	$20{,}09$		$-2{,}20$		$29{,}43$
T_{8-10} =	$29{,}43$	$u_4 = M_4^v =$	$-8{,}44$	$u_{10} = M_{10}^v =$	$32{,}24$
	$4{,}31$		0		$1{,}88$
T_{10-12} =	$33{,}74$	$u_5 = M_4 =$	$-8{,}44$	$u_{11} = M_{10}^h =$	$34{,}12$
			0		$33{,}74$
		$u_4 = M_4^h =$	$-8{,}44$	$u_{12} = M_{12}^v =$	$67{,}86$
			$2{,}86$		0
		$u_7 = M_6^v =$	$-5{,}58$	$u_{13} = M_{12} =$	$67{,}86$
			$-0{,}94$		
		$u_6 = M_6^h =$	$-6{,}52$		

Dette Eksempel kan ogsaa benyttes som Eksempel paa en i Pkt. A og G simpelt understøttet Gitterbjælke paavirket i Pkt. D af en lodret opadrettet Kraft lig 1,5 P (se Fig. 8 a). Herved vilde man netop faa den i Fig. 8 c viste Nedbøjningslinie blot med Linie 0—12 som Slutlinie. Beregningsgangen bliver iøvrigt her som ovenfor kun med den Forskel, at den konjugerede Bjælke er simpelt understøttet i Pkt. A og G.

Summary.

v-forces and *w*-Moments.

v-forces and *w*-moments are such (fictive) forces and moments as, when applied as loading on the conjugate to a given beam, may produce a moment curve identical with the deflection line of the given beam. The author deduces formulas for *v*-forces and *w*-moments and proves that any deflection line may be represented by the moment curve resulting from loading the conjugate beam by such quantities.

Considering at first the general section of a beam the potential deformations of a beam element are illustrated (Fig. 1) and it is shown that the curvature of the moment curve at any points of the conjugate beam can be made to conform with the curvature of the deflection line of the considered beam by applying:

(a) a concentrated load, (v-force), $v_m = \Delta\alpha_m$, (Fig. 1 a)
or, (b), a moment, (w-moment), $w_m = \Delta t_m$, (Fig. 1 b)
or, (c), at the point C_m a concentrated load, (v-force), $v_{cm} = \Delta\alpha_m$, (Fig. 1 c).

Next, the singular points of the beam are considered. In Fig. 2 with annexed table the various points of singularity are enumerated. The left-hand side of the table refers to the given beam, the right-hand side to the conjugate beam.

The quantities u are lineal deflections, α angular deflections, M moments, T shears, the indices $_V$ and $_H$ referring to the left- and right-hand side of the point respectively. t_k and α_k are given deflections, (conf. Figs. 1 b and a), M_k and P_k the corresponding moments and concentrated loads, t_x and α_x are variable deflections, M_x and P_x the corresponding moments and concentrated loads.

The fact that the duality of the deflection line and the moment curve as shown in the table is complete proves that any deflection line of a beam may be produced as the moment curve of the conjugate beam.

By developing the equations (1)—(3) expressions are finally evolved for the v-force and w-moment loading of girders (equations (4) and (5)) as well as for trusses (equations (8)—(11)).

ARBEJDSLIGNINGEN

AF *I. G. HANNEMANN*

I det følgende skal vises, hvorledes de almindelige Ligevægtsligninger for et Legeme i Ligevægt under Paavirkning af ydre Kræfter kan formuleres som en enkelt general Ligning: Arbejdsligningen. Arbejdsligningen udtrykker, at det samlede Arbejde, der præsteres ved Forskydninger af Legemets forskellige Dele, altid er Nul under Forudsætning af, at Kræfterne, de ydre saavel som de indre, ikke forandres, og at Ligevægten bevares under Forskydningen[1]).

Der kan her være Tale om to principielt forskellige Tilfælde af Forskydninger:

a) Forskydninger af Legemets Punkter fremkommer ved, at Legemet deles, og der herefter foretages en *ren Flytning* uden nogen Deformation af de enkelte Dele.

b) Forskydninger af Legemets Punkter fremkommer ved, at Legemet udsættes for en *Deformation.*

I det følgende skal Arbejdsligningen udledes, for begge disse Tilfælde under et, for et vilkaarligt, rumligt paavirket Legeme, idet der dog i tilhørende Figurer, Fig. 1 og 2, for Overskuelighedens Skyld er vist et uendeligt tyndt prismatisk Element af en Trækstang, (en eenakset Spændingstilstand).

Legemet (Fig. 1 a) bestaar af en Række (uendelig smaa) Elementer, som bibringes de indre Spændinger p eller Kræfter $dK = pdF$ ved Paavirkning fra den ydre Belastning Q. Legemet forudsættes i Ligevægt for denne Belastning.

[1]) *P. M. Frandsen* har i Elasticitetsteori, 1946, Art. 16 givet et alment Udtryk for Arbejdsligningen og i Art. 48 og 49 udledt Arbejdsligningen for Rumbjælker.

For at anskueliggøre, hvorledes Kræfterne virker paa Elementerne, er Elementerne i Fig. 1 b trukket lidt fra hinanden. Punkter eller Snit med ens Betegnelse er saaledes i Virkeligheden sammenfaldende. Endvidere er ogsaa Snitkræfterne dK_s i Snit a—a, b—b, $\cdots$ angivet her. Man vil lægge Mærke til, at ikke blot de ydre Kræfter, der paavirker Legemet, men ogsaa de hertil svarende Reaktionskræfter, hvormed Legemet paavirker de ydre Kræfter (Omgivelserne), er medtaget. Dette gælder ogsaa Snitkræfterne dK_s, der ved Legemets Deling maa tilføjes som ydre Kræfter. De nævnte Reaktionskræfter er naturligvis ligesom de ydre Kræfter i Ligevægt, men bør medtages, da de altid vil være til Stede og derved fuldstændiggør Systemet. Det bemærkes, at de indre Kræfter i et Element svarer til de Kræfter, hvormed Elementet paavirker dets Omgivelser (Naboelementer eller ydre Kræfter).

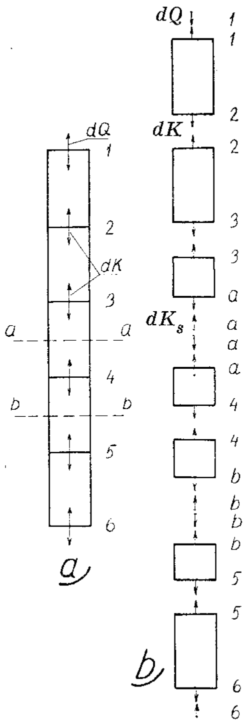

Fig. 1.

Da Fig. 1 a og 1 b udtrykker ganske det samme, er de simple Betegnelser i Fig. 1 a benyttet i Fig. 2 a og b, der viser Legemet før og efter en Forskydning.

Legemet (Fig. 2 a) gives: a) Forskydninger i Form af Flytninger, idet det ved forskellige Snit (a—a, b—b, $\cdots$) deles i vilkaarlige Dele, der flyttes i Forhold til hinanden. Samtidig maa Snitkræfterne dK_s i de lagte Snit tilføjes som ydre Kræfter for at bevare Ligevægten. Desuden gives Legemet: b) Forskydninger i Form af Deformationer af Elementerne (se Fig. 2 b).

Det Arbejde A, der herved præsteres, bestemmes som en Sum af de ydre saavel som de indre Kræfters Arbejde.

Tages ved Summeringen Aktions- og Reaktionskræfterne parvis sammen (Kræfterne i Punkterne 1, 2, 3, $\cdots$, $a, a, b, b, \cdots$, Fig. 2) faas:

$$A = 0. \tag{1}$$

Tages derimod ved Summeringen de ydre Kræfter for sig, Snitkræfterne i hvert af de lagte Snit (a—a, b—b, $\cdots$) for sig samt de indre Kræfter for hvert Element (1—2, 2—3, $\cdots$) for sig, faas:

$$A = \Sigma Q\,\delta - \Sigma \int dK_s \Delta k_s - \int \Sigma dK \Delta dk, \tag{2}$$

hvor δ er Projektionerne af Forskydningerne af Angrebspunkterne for de ydre Kræfter Q ind paa disses Angrebslinier, regnet positive, naar Forskydningerne gaar i samme Retning som Kræfterne, medens Δk_s er Projektionerne af Forskydningerne af Angrebspunkterne for de lagte Snits Snitkræfter dK_s ind paa disses Angrebslinier, regnet positive, naar Forskydningsprojektionerne gaar i modsat Retning af Kræfterne, og Δdk er Projektionerne af Forskydningerne af Angrebspunkterne for Elementernes indre Kræfter dK ind paa disses Angrebslinier, regnet positive tilsvarende som Δk_s.

I første Led i Ligning (2) omfatter Summationen alle de ydre Kræfter, der paavirker Legemet. I Ligningens andet Led skal Integrationen udstrækkes over hele Fladen af hvert enkelt af de lagte Snit, medens Summationen omfatter alle de lagte Snit. I Ligningens sidste Led omfatter Summationen alle de indre Kræfter for hvert enkelt Element, medens Integrationen skal udstrækkes over hele Legemet.

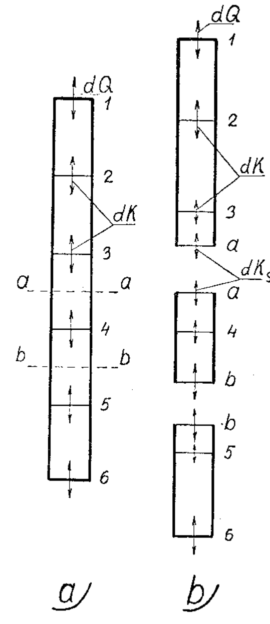

Fig. 2.

Sammenholdes Ligning (1) og (2) kommer man til Arbejdsligningen i en almengyldig Form:

$$\Sigma Q\,\delta = \Sigma \int dK_s \Delta k_s + \int \Sigma dK \Delta dk. \tag{3}$$

Da Arbejdsligningen (3), som det fremgaar af det ovenstaaende, blot er en Omskrivning af Identitetsprincippet: Aktion lig Reaktion, der igen udgør et samlet Udtryk for Ligevægtsligningerne, ses det, at Arbejdsligningen ligeledes kan opfattes som et generelt Udtryk for Ligevægtsligningerne.

Arbejdsligningen ved ren Flytning.

Arbejdsligningen (3) kan benyttes til at bestemme Kræfter (Reaktioner, Stangkræfter, Momenter etc.) i et System paavirket af en given Belastning Q, idet man giver Systemets Dele passende, *fiktive Flytninger*. Sidste Led paa højre Side af Ligningen (3) bliver herved Nul.

Idet der for hvert af de lagte Snit anvendes et Aksesystem med vilkaarligt Begyndelsespunkt 0 og tre vilkaarlige paa hinanden vinkelrette Akser, x-, y- og z-Aksen, kan en hvilken som helst Flytning karakteriseres ved tre Translationskomponenter Δk_x^s, Δk_y^s og Δk_z^s samt tre Rotationskomponenter $\Delta\alpha_x^s$, $\Delta\alpha_y^s$ og $\Delta\alpha_z^s$ i henholdsvis X-, Y- og Z-Aksen.

Kraften dK_s med Komposanterne dK_x^s, dK_y^s og dK_z^s efter x-, y- og z-Aksen i det vilkaarlige Punkt med Koordinaterne x, y, z udfører Arbejdet:

$$d\Delta A_s = -dK_x^s\Delta k_x^s - dK_y^s\Delta k_y^s - dK_z^s\Delta k_z^s - \left(ydK_z^s - zdK_y^s\right)\Delta\alpha_x^s$$
$$-\left(zdK_x^s - xdK_z^s\right)\Delta\alpha_y^s - \left(xdK_y^s - ydK_x^s\right)\Delta\alpha_z^s.$$

Ved Integration over hele Snitfladen faas heraf det samlede Arbejde fra samtlige Snitkræfter paa hele Snitfladen.

$$\Delta A_s = -K_x^s\Delta k_x^s - K_y^s\Delta k_y^s - K_z^s\Delta k_z^s - M_x^s\Delta\alpha_x^s - M_y^s\Delta\alpha_y^s - M_z^s\Delta\alpha_z^s, \quad (4)$$

hvor K_x^s, K_y^s og K_z^s er Komposanterne af Snitkræfternes samlede Kraftresultant K_s, og M_x^s, M_y^s og M_z^s er Komposanterne af Kræfternes samlede Momentresultant M_s om Punktet 0, og hvor de negative Fortegn fremkommer, idet Translationerne og Rotationerne regnes positive modsat Kræfterne henholdsvis Momenterne.

Arbejdsligningen (3) kan i dette Tilfælde herefter skrives som:

$$\Sigma Q\delta = \Sigma\left(K_x^s\Delta k_x^s + K_y^s\Delta k_y^s + K_z^s\Delta k_z^s + M_x^s\Delta\alpha_x^s + M_y^s\Delta\alpha_y^s + M_z^s\Delta\alpha_z^s\right). \quad (5)$$

Det bemærkes, at Gruppen af Kræfter og af Forskydninger hver for sig er sammenhørende, men indbyrdes er uafhængige. Da der her er Tale om fiktive Forskydninger, kan disse altid gøres uendelig smaa, saaledes at de ydre Kræfter og Snitkræfterne ikke forandres, og Ligevægten bevares under Forskydningen.

Ønsker man at bestemme en eller anden Snitkraft, ses det let, at man af Ligning (5) kan faa denne som eneste ubekendte ved at lægge et Snit gennem Legemet det paagældende Sted og give Legemets Dele passende fiktive Flytninger. Med Hensyn til den nærmere Udformning af Beregningerne i de forskellige Tilfælde skal iøvrigt henvises til Lærebøgerne i Statik[1]).

Arbejdsligningen ved Deformation.

Arbejdsligningen (3) kan ogsaa benyttes til at bestemme Forskydninger, (Nedbøjninger, Vinkeldrejninger, etc.) i et System udsat for en given Deformationspaavirkning f. Eks. i Form af en given Belastning

[1]) Se f. Eks. *Chr. Nøkkentved:* Teknisk Statik I, 1. Udg. § 20 og 21.

eller en Temperaturvariation, idet man angriber Systemet med passende, *fiktive Kræfter*. Første Led paa højre Side af Ligning (3) bliver herved Nul.

Idet Legemet kan betragtes som bestaaende af en Række Elementer med uendelig lille Udstrækning i een Retning og med Sideflader svarende til Snitfladerne for en Række konsekutive Snit gennem Legemet, kan det samlede Arbejde fra de til et Element hørende indre Kræfter paa den ene af Elementets Sideflader direkte opskrives ved Hjælp af Ligning (4), idet der benyttes et lignende Aksesystem som der:

$$\Delta A = -K_x\Delta k_x - K_y\Delta k_y - K_z\Delta k_z - M_x\Delta\alpha_x - M_y\Delta\alpha_y - M_z\Delta\alpha_z, \quad (6)$$

hvor K_x, K_y og K_z er Aksekomposanterne af de paa Sidefladen virkende indre Kræfters samlede Kraftresultant K, og M_x, M_y og M_z er Aksekomposanterne af Kræfternes samlede Momentresultant M om Aksesystemets Begyndelsespunkt 0, og hvor Δk_x, Δk_y og Δk_z og $\Delta\alpha_x$, $\Delta\alpha_y$ og $\Delta\alpha_z$ er Translations- henholdsvis Rotationskomponenterne i Akserne for den ved Deformationen fremkomne Forskydning af Sidefladen, idet det forudsættes, at *Sidefladen ikke forandrer sin Form under Deformationen.* Som ovenfor er de positive Retninger for Translationerne og Rotationerne modsat Kræfternes og Momenternes.

Herefter betragtes hele Elementet i Relation til det en Gang valgte Aksesystem. De resulterende Kraft- og Momentkomposanter for Elementets anden Sideflade faar smaa Tilvækster: dK_x, dK_y og dK_z samt dM_x, dM_y og dM_z, og Translations- og Rotationskomponenterne for denne Sideflade faar ligeledes smaa Tilvækster: Δdk_x, Δdk_y og Δdk_z samt $\Delta d\alpha_x$, $\Delta d\alpha_y$ og $\Delta d\alpha_z$.

Desuden kommer der i Elementet uendelig smaa indre Reaktionskræfter dR med Komposanterne dR_x, dR_y og dR_z, angribende i Punkter med Koordinater x_r, y_r og z_r, fra de paa Elementet virkende ydre Kræfter deriblandt Egenvægtskræfter.

Man kan nu bestemme det samlede Arbejde, som alle Elementets indre Kræfter præsterer, idet Led, der er uendelig smaa af højere Orden kan bortkastes:

$$\Delta dA = -K_x\Delta dk_x - K_y\Delta dk_y - K_z\Delta dk_z - M_x\Delta d\alpha_x - M_y\Delta d\alpha_y - M_z\Delta d\alpha_z$$
$$-\Delta k_x dK_x - \Delta k_y dK_y - \Delta k_z dK_z - \Delta\alpha_x dM_x - \Delta\alpha_y dM_y - \Delta\alpha_z dM_z$$
$$-\Delta k_x\Sigma dR_x - \Delta k_y\Sigma dR_y - \Delta k_z\Sigma dR_z - \Delta\alpha_x\Sigma\left(y_r dR_z - z_r dR_y\right)$$
$$-\Delta\alpha_y\Sigma\left(z_r dR_x - x_r dR_z\right) - \Delta\alpha_z\Sigma\left(x_r dR_y - y_r dR_x\right).$$

Imidlertid er som Følge af, at Elementet er i Ligevægt:

$$dK_x = -\Sigma dR_x, \quad dK_y = -\Sigma dR_y \quad \text{og} \quad dK_z = -\Sigma dR_z \quad \text{samt}$$

$$dM_x = -\Sigma(y_r dR_z - z_r dR_y),\ dM_y = -\Sigma(z_r dR_x - x_r dR_z) \text{ og}$$
$$dM_z = -\Sigma(x_r dR_y - y_r dR_x),$$

hvorved Leddene herfra udgaar af ovenstaaende Ligning, og man faar:

$$\Delta dA = -K_x \Delta dk_x - K_y \Delta dk_y - K_z \Delta dk_z - M_x \Delta d\alpha_x - M_y \Delta d\alpha_y - M_z \Delta d\alpha_z. \quad (7)$$

Arbejdsligningen (3) kan saaledes i dette Tilfælde herefter skrives som:

$$\Sigma Q\delta = \int (K_x \Delta dk_x + K_y \Delta dk_y + K_z \Delta dk_z + M_x \Delta d\alpha_x + M_y \Delta d\alpha_y + M_z \Delta d\alpha_z). \quad (8)$$

Det bemærkes, at Gruppen af Kræfter og af Forskydninger hver for sig er sammenhørende, men indbyrdes er uafhængige. Da der her er Tale om fiktive Kræfter, kan disse altid gøres uendelig smaa, saaledes at de ikke influerer paa Materialets Egenskaber, og Deformationerne ikke ændres. Deformationerne, enten de stammer fra en given Belastning eller en Temperaturvariation, kan normalt betragtes som uendelig smaa, saaledes at de fiktive Kræfter ikke forandres, og Ligevægten bevares under Forskydningen.

Ønsker man at bestemme en eller anden Formforandring, ses det let, at man af Ligning (8) kan faa denne som eneste ubekendt ved at paavirke Legemet med passende fiktive Kræfter. Med Hensyn til den nærmere Udformning af Beregningerne i de forskellige Tilfælde skal iøvrigt henvises til Lærebøgerne i Statik (se Fodnoten Side 124).

Summary.

Is it shown how the equation (3), expressing that, for an arbitrary translocation and/or deformation of a body in equilibrium, the work produced by the external and internal forces totals nil, may be conceived as a general expression of the equations of equilibrium.

Let A be the work produced when a body in equilibrium is given a certain translocation and/or deformation and determined as the total of work produced by the external and internal forces. If the elements of work produced by the active and reactive forces are added in pairs the equation (1) results. If, however, the elements of work produced by the external forces Q, the sectional forces dK_s, and the internal stresses dK are added by the respective categories the equation (2) is evolved, δ, Δk_s and Δdk being the displacements corresponding to the respective forces. From (1) and (2) equation (3) is obtained. For simple translocation the equation (3) gives equation (5) and for deformation of the body equation (8) is obtained.

BIANCO LUNO A/S, KBH.